一位小六学生在分数问题的解题表现与成长－从测度问题的解题行为分析

刘祥通
嘉义大学 数学教育研究所 教授
康淑娟
嘉义大学 数学教育研究所 研究助理

摘要：个案小美是一位小六学生，小美在校数学成绩还不错，但是解较难的或课外的数学问题却是没有信心，因此，研究者以非例行性问题为研究主要施测工具，例如以工作单为单位量不是 1，而寻找分数落点的问题，来考验小美的解题表现与成长。

研究者特别从她作图时的下笔顺序，以观察她的解题行为，而综合讨论则从资源、捷思、监控与信念四个向度来分析小美的解题表现与成长，并引申出教学建议。

关键词：测度、基准量、分数、解题

壹、研究背景与目的

分数是国民小学数学课程中的一个重要概念，与除法、小数、百分率、比、比率与机率等概念关系密切，这些题材在国小数学教材中占有相当重要的地位，且关联到国中教材。在九年一贯数学领域中的「数与计算」部分共计有 21 个能力指针，而有关分数的主题占了 8 个，显示在九年一贯的数学学习领域中，分数在国小数学教学的重要性。刘秋木（1996）更进一步强调，在国小阶段，分数是重要的概念之一，也是往后数学学习的基石，所以分数有如连结基础数学与高深数学的重要桥梁。

既然分数在小学阶段如此地重要，但分数的学习对学童而言却是困难重重，除了学童一直停留在过去用处理整数的数学方法来处理分数外，分数本身具有多重的意义，容易导致学生在分数学习上有着难以克服的困难与迷思。自从 Kieren（1976）提出五种分数的不同子构念，他的研究可说是后续研究探讨有理数的支架（backbone）。后续的研究（Ohlsson, 1988；Behr, Harel, Post, & Lesh, 1992；Marshall, 1993）也都接受或延续子构念的观点，且以此观点分析与讨论分数的概念。

Behr, Lesh, Post 和 Silver（1983）认为，分数约略可以分成下列五种构念：部分-整体、商、测度、比值与运算子。这五种构念各代表不一样的问题情境，而每一种情境都与特定的认知结构相关联。例如「测度」这个构念则代表数在线的一个数值，可以表示为线段长，亦可以表征为数在线的一点（教育部，1993）。此外，刘祥通（2004）亦指出，分数当作测度即是分数可以在数在线找到对应的点。

吕玉琴（1996）的论述指出，将分数视为数在线一个点的值，最重要的一件事就是确认单位量。然而，在国小阶段，有关分数在数在线的问题，大都是基准量为 1 的情境，例如数在线给定 0 与 1，要求学生在数在线画出某一分数的点等等，0 与 1 是学生常接触且较熟悉的情境，倘若今天不是给定 0 与 1，而是给定 0 与 2、0 与 3，以基准量为 2、3 的情境，或甚是非整数（分数）的情境，学生的表现又是如何？Kerslake（1986）的研究指出，当数线为一个单位长（基准量 1）时，学生解题较容易成功；而数线为 2 个单位长（基准量 2）时，有些学生解题就有困难了。再者，刘祥通（2007）的研究也指出，当以集聚单位（一个以上的单位长）为基准量的同时，学生基准化能力的完整与否也是影响测度问题的关键。

由此可知，基准化的能力是解分数测度构念问题的关键之一（刘祥通，2004），此外，等分与部份-整体构念亦是提供分数概念的基础（Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983）。因此，研究者试着以非基准量 1 的情境（基准量为 2、3 与分数），来探讨一位小六学生在分数测度构念上的解题表现，尤其是解题时使用那些资源？那些策略？那些后设认知的监控行为，以及解题行为背后隐藏的数学信念为何？

贰、文献探讨

为了响应上述研究问题，文献探讨分为单位量、分数测度构念、单位化与基准化以及数学解题表现与分析架构四部份作介绍，以下分别叙述之：

一、单位量

单位量在数与量概念中占有很重要的地位。Euclid 的论述强调：「本质上单位是指存在而被称为『一』的事物（A unit is that by virtue of which each of the things that exists is called one）」；「一个数是由多个单位量构成的组合（A number is a multitude composed of units）」（引自 Steffe, von Glaserfeld, Richard, & Cobb, 1983）。而 Norton 与 McCloskey（2008）以及 McCloskey 与 Norton（2009）认为单位量即是将一个对象或一个集合视为一个初始单位或是一个整体。因此换言之，单位量即为度量的标准，表示以某一量为基本单位，可能以「1」为一个基本单位，亦可能以非 1 为一个基本单位，例如大于 1 的数或分数等等。

Saenz-Ludlow（1994；1995）的论述指出，儿童能否找到适当的单位，将指定的部分量分尽，再利用这个单位重组成全部或集合，这种能力即为「单位形成能力」，此能力是儿童能否解决分数问题的关键。而单位形成能力的养成与撕裂（splitting）活动有密切的关系，撕裂活动同时由分割与迭代活动所组成。撕裂活动数值化的结果则是单位分数。例如如何找出一线段的$\frac{1}{5}$，则需要：（1）有分的动作；（2）每一等份要相等；（3）要将全部分完。而试图获得线段的$\frac{1}{5}$是「分割」的动作；将 5 个$\frac{1}{5}$的线段拼凑成原线段则是「迭代」的动作（Norton & McCloskey, 2008；McCloskey & Norton, 2009）。

Confrey（1994）建议学生应从小学低年级就开始发展撕裂的概念，而不是后来在学习过乘法、除法、比和比例之后。 Tzur（2000）也强调撕裂活动可以建立孩子分解数字的能力，而学生可以从撕裂活动中建构单位化能力。

然而，虽然单位量在分数概念上占有相当重要的地位，可是学生常常会有指认单位量的困难，最常见的就是忽略给定的单位量，如在单位长为 2，找出何处为$\frac{3}{8}$的情境下，学生仍是将整个单位长等分成 8 段再标示出$\frac{3}{8}$的位置。此外，Lamon（1999）的论述提到，当学生分割一单位长时，有一个显而易见的障碍就是学生无法精确地完成分割。再者，刘祥通（2004）的研究也指出，有大多数的学生在数在线采取「约估法」以逐点描绘的方式，却不会使用「参考点」作图，而从学生的观点而言，他们虽然有「部份与整体」之间的关系，却缺乏判断「部份与部份」之间是否相同的概念，造成解题上的误差。

由此可知，单位量在分数概念上占有相当重要的地位，此外，等分与否也是影响学生分数概念的因素，因为分数是部份与整体之间的关系，而部份与整体这一层关系必须建立在等分的前提之上，这也是许多学生容易犯的错。

二、分数测度构念

在国民中小学九年一贯课程纲要数学学习领域（教育部，2003）当中指出，有关分数测度构念的能力指标之一：「5-n-11」即表示能够将分数、小数标记在数在线，此能力指标要求学生在没有刻度的辅助下可以标示出分数在数线的位置。然而，一般人往往认为分数只是将某个单位量等分割后的结果，但是分数也是一个数，在数在线占有一席之地，也就是数在线的一个数值，且此意义又可分为两种：（1）表示线段长；（2）表征为数在线的一点（教育部，1993），研究者认为许多学生对于第一种意义不够了解，原因在于无法分辨测度所代表的是线段而非位置。

Bright, Behr, Post 和 Wachsmuth（1988）认为（1）数线可以当做是一把尺，例如：当我们选择固定单位量或单位分量（基准点，benchmark）标示在数在线时，即可做为我们测量的标的物；（2）数线是连续的量，因为数与数之间有稠密性，可以做无限的切割；（3）数线需要符号来表示。例如：当我们标示原点与单位长时（或标示始末点），一个等分割线段就可以清楚的判断每段分割后单位量的大小。

三、单位化与基准化

Lamon（1996）的论述指出，所谓的「单位化」，是采取适当的测量单位至指定量的一种认知指派（cognitive assignment），至于选用何种测量单位，则需要考虑指定物的性质。在单位化的过程当中，是以单位概念的知觉基础为行动的依据，学童要先能以 1 为单位来进行运算，再以非 1 的整数（如 10、100）做为运算的基本单位量，再进阶到以单位分量（如$\frac{1}{2}$

、$\frac{1}{3}$）及非单位分量（如$\frac{2}{3}$、$\frac{3}{4}$）为基本单位量进行运算。以$\frac{3}{4}$为例，我们可以视为 3 个$\frac{1}{4}$，也就是将$\frac{1}{4}$单位化，形成一个新的单位；亦可视为 1 个$\frac{3}{4}$，将$\frac{3}{4}$单位化成一个新的单位。

而「基准化」就Lamon（1990）的观点即认为集聚单位一旦建立后，用此集聚单位以重新诠释新的数量情境的过程。例如Freudenhal所说的「把地球的直径大小想象成毫米（1mm），那么太阳的大小则为一个直径 10 公分，且与地球距离为 10 公尺的球体」（引自刘祥通、周立勋，2001）。Lamon（1999）的论述指出，测度构念的掌握是要能根据给定的单位量做出相对量大小的能力。也就是说，若已知某单位长为 1，那么「$\frac{3}{4}$」这个点的位置就固定了，因为$\frac{3}{4}$这个点是$\frac{3}{4}$相对于 1 的位置。换句话说，当我们改变了 1 的长度（位置）时，$\frac{3}{4}$的位置也相对地改变了。

透过上述文献，研究者认为，单位量通常代表操作分数时所运用的一单位之量，常见的单位量为「1」；而基准量则常运用于比较另一量的「基准化」过程中，如以数在线的「$\frac{4}{3}$」位置为基准，找出相对的「$\frac{11}{6}$」位置，而其中的「$\frac{4}{3}$」长度或大小称为「基准量」。

本研究旨在以不同基准量的情境来探讨个案在分数测度构念上的解题表现，因此，针对不同的基准量，个案必须能够掌握指定物（问题给定的分数）的性质，因而选取适当的测量单位；亦能够针对不同的基准量，找出相对于基准量的测量单位。而这些能力，就是单位化与基准化的能力，也是影响解测度问题的关键（刘祥通，2007）。

四、数学解题表现与分析架构

Polya（1945）提出数学解题的四个阶段，理解题意、制定解题策略、执行解题策略、回顾。上述四个阶段帮助数学教育学者了解解题的本质，也帮助数学教师协助学生提升学生的解题能力（Liu, 1993）。刘秋木（1996）也针对以上四个解题步骤设计解题行为量表。此量表不仅检测学生解题正确与否，也可以判断「学生对题意是否了解？」。

Mayer（1992）从问题解决和认知心理学的观点，指出解题的过程包含两个步骤，而每一个步骤之下又包含两个子步骤：

（一）问题表征（problem representation）：意旨将问题的文字或图像转换成心理表征。

1.问题转译（problem translation）：将每一个句子或主要句子转成内在心理表征。

2.问题整合（problem integration）：将问题的叙述组合成连贯一致的表征。

（二）问题解答（problem solution）：意旨从问题的心理表征进行到最后答案的过程。

1.解答的计划与监控（solution planning and monitoring）：发展并保持计划解答的线索。

2.解答的执行（solution execution）：完成计划。

Schoenfeld（1985）的分析架构，选取以下四点作为解析个案解题表现的主要方向：

1 资源（resources）：解题者拥有有效地把手头上的问题解决的知识，包括直观与非正式知识，算法程序与理解进行工作的相关商定的规则。

2. 捷思法（heuristics）：解题者解非例行性问题所利用的策略与技巧，包含所画的图、所利用的相关问题与所重新形成的问题（reformulating problems）。

3. 监控（control）：关于资源与捷思的选择（selection）与执行（implementation）的整体决定（global decisions），包含计划、监控，决策的评估与有意识的后设认知行为。

4. 信念系统（belief system）：解题者对数学世界的看法，一组决定性的因素，包含关于自己、关于环境、关于题材与关于数学等决定个体的解题行为。

参、研究方法

本研究属于个案研究，采用结构式工作单的访谈法（task-based interview）（Goldin, 2000），并根据个案在工作单上的解题与写作表现进行访谈。本章共分为研究对象、研究者、工作单问题与资料分析四部分，以下分别叙述之：

一、研究对象

参与本研究的个案小美（化名），于小学五年级即将升六年级的暑假参与本研究。小美喜好阅读文学，并有着很好的写作能力，且在校数学成绩不错，不过，却无法有足够的自信去面对、挑战非例行性的数学问题。这激发了研究者探究她非例行性数学问题解题能力的动机。

于是展开了研究的起端，研究者先以一个问题来访谈、分析小美研究前的初始能力，小美面对基准量为 1 而求$\frac{7}{6}$的问题，在受访时这样说“$\frac{7}{6}$的位置会比 1 多一点。如果将前面的平均分配一下，分成 6 份，就可以找到大概的位置。”，而当研究者继续提问“大概啊？你有没有利用$\frac{1}{6}$是$\frac{1}{2}$的$\frac{1}{3}$的关系？”，“嗯，我也不知道耶，就大概阿。”小美轻轻带过，简略地回答此问题。由此，研究者判断小美能理解 1 与$\frac{7}{6}$的关系，也清楚$\frac{1}{6}$的意义，但研究者尚未看到她将以上各分数之间关系的先备知识应用于数线的作图上，而是仅以略估的方式完成。她是否能利用$\frac{1}{6}$是$\frac{1}{2}$的$\frac{1}{3}$这样的先备知识于解题以及图形表征，有待更深入的研究。再者，小美解题时是否能发挥后设监控的能力也是本研究要关心的。

二、研究者

在质的研究中，研究者即研究工具（The researcher is the instrument）（Guba & Lincoln, 1981）。因此，研究者在研究当中，以结构式工作单晤谈法（structured, task based interview）（Goldin, 2000），扮演着访谈个案的角色，与小美产生互动的关系。又研究者采用Schoenfeld（1985）的数学解题分析的架构，将主要关注个案解题的下列几个问题：尝试寻求答案时发

生了什么？解题者利用了何种数学知识？为什么选择它？如何使用它？为什么答案可由此方式推演？解题方法是否反映个人数学领域的理解？理解与解题表现的关系如何？

为了探讨小美在标示点的位置时，是否能够察觉该点的位置与基准量大小的相对关系，在解工作单问题的过程当中，研究者特意观察小美下笔的顺序，藉由小美标示点的顺序，研究者更能大抵预测小美最原始的自发性想法，并以此作为访谈时的依据，且在小美对解题做图形表征时，研究者提醒他尽量精准的标示其解题想法，藉以了解他对测度构念的掌握。而在访谈的过程中，当小美解题正确时，研究者会根据其自发性的解法问他「为什么？」，以促动他思考整理出自己的想法后表达出来。

如此一来，便可以获得小美对这些数学概念所拥有最彻底的思维，亦可作为研究者探讨小美在分数测度构念的重要依据。例如在原案二中，小美的写作与访谈时的解说不太一致，因此研究者反问他有没有别的算法，促动他思考，引导他从写作的内容衍生另一种解法。因此，研究者即可分析，小美能以不同解题方式完成原案二的问题。

三、工作单问题

工作单问题以基准量非 1 为主，有基准量为整数（2、3）与基准量为分数两种情境，且在问题的设计上，研究者刻意在数在线将每一种情境的基准量大小控制等长，或许这样的问题在数在线缺乏合理性，但研究者主要的考虑是要探讨个案基准化的能力，也就是能够根据给定的基准量找出相对量的位置，这种能力应该是不受基准量所限制的。而访谈时间皆为小美当天全部解题完毕后进行。

工作单结构如下：

工作单题目	答案往内找	答案往外找
以 2 基准量	ˇ	
以 2 基准量		ˇ
以 3 基准量	ˇ	
以 3/4 基准量		ˇ

四、资料分析

本研究是以个案研究从事资料的搜集，研究者以工作单解题表现与访谈的内容作为研究用的资料。工作单的解题表现，主要是呈现小美的自发性解题为何。为了适时地追本朔源，更清楚了解小美的真正想法，研究者再针对他的自发性解题，进行深入的访谈。访谈的主要目的是为了了解小美的思维历程，从对话的过程中，了解其思考、推理、最后解题成功与否。

本研究参考 Schoenfeld（1985）的分析架构，选取以下三点作为解析个案解题表现的主要方向：1 资源、2.捷思法、与 3. 监控。

在访谈的过程当中，亦使用录音与录像。研究者将录音带的资料全部转成逐字稿，依次

序将逐字稿的内容以 4 个阿拉伯数字编码，例如以 0101 即表示第一个问题的第一句话。研究者将转录的资料进行原案分析与归纳，再赋予此归纳一个叙述标签来呈现小美对此单元的某种解题策略与表现，最后把所有赋予标签的归纳整合起来，作为形成主题之依据。

为了增进数据诠释的信效度，除了基于已有的经验所衍生的假设必须和录音与录像记录加以辩证之外，采取「对等问题（equivalent problem)」，如问题一和问题三，持续考验小美来去除研究者的成见以及偶发事件的过度阐释（Reed，1987)。

肆、研究结果

研究结果分为基准量为整数与基准量为分数两种情境，其中整数分为 2 与 3 两种类型，分别说明如下：

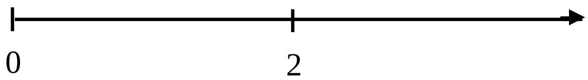
一、基准量为 2 的情境

根据小美在基准量为 2 的解题表现，研究者发现，小美会先将题目所给定的分数转换成带分数，以了解此带分数落在哪一段区间，进而略估此分数的大概位置。

原案一

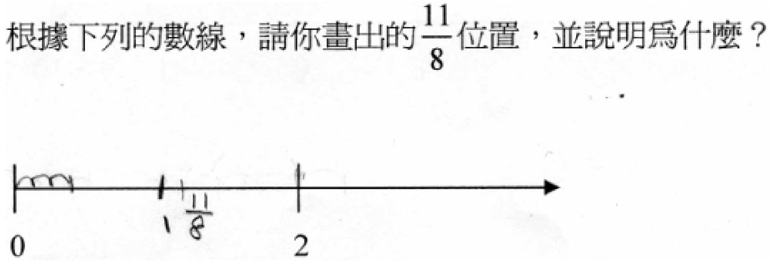
问题：

根据下列的数线，请你画出$\frac{11}{8}$的位置，并说明为什么？



图一

小美的初始解题：



受访解说： 图二

101　T：这一题呢？你怎么做答？

102　S：先找 2 在这里嘛，所以 1 就是 2 的一半，就在这里(指 0 至 2 的中点处)，因为$\frac{11}{8}$不到 2 啊，所以他就在 1 和 2 之间，所以再找出$\frac{11}{8}$…

103　T：所以大概在这里是不是(指着小朋友画的$\frac{11}{8}$的位置)？

104　S：对啊！

105　T：那 1 在这里啊，那你怎么知道$\frac{11}{8}$？

106　S：就是 11－8＝3，再从 1 之前去平分 8 份，再从 1 去加 3 份

107　T：那你怎么去平分 8 份？

108　S：就大概的啊

109　T：好，那老师问你 1 和$\frac{1}{8}$的关系。

110　S：1 和$\frac{1}{8}$喔，就是 8 份里面的一份

111　T：那$\frac{1}{8}$和$\frac{1}{2}$的关系呢？

112　S：就是$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$。

113　T：那$\frac{1}{2}$的一半是多少？

114　S：$\frac{1}{4}$。

115　T：那$\frac{1}{4}$的一半是多少？

116　S：$\frac{1}{8}$。

117　T：那你有没有利用这样的关系来画图？

118　S：我也不知道耶…

分析一

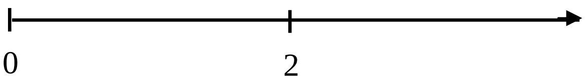
原案一为基准量 2 的问题，由【行号 106】，研究者发现小美一开始即将$\frac{11}{8}$转换成 $1\frac{3}{8}$，并从 1 往后找距离$\frac{3}{8}$的位子，且根据小美的作图，研究者发现小美知道先在 0 与 1 的区间中找出$\frac{3}{8}$的位置，再根据$\frac{3}{8}$的距离，在 1 之后找到 $1\frac{3}{8}$的位子，不过小美并没有准确地画出$\frac{3}{8}$（如图二）。

因此研究者继续提问 1 与$\frac{1}{8}$，以及$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$与$\frac{1}{8}$的关系，藉以判断小美是否拥有这些知识，而由小美的回答可以发现小美了解并拥有这些作图前的必备知识，但并未将此知识运用在作图上，发展出捷思方法（折半法），以划出较精确的位置【行号 109-118】。且小美也未发挥后设监控的能力，以致于前后的$\frac{3}{8}$距离不等。

原案二

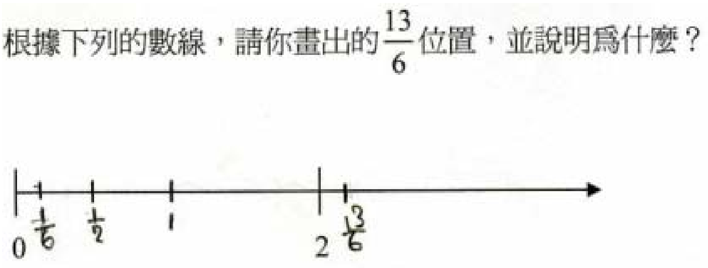
问题：能利用 1 与$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{2}$与$\frac{1}{6}$相互关系找到$\frac{13}{6}$准确的位置

根据下列的数线，请你画出$\frac{13}{6}$的位置，并说明为什么？



图三

小美的初始解题：



图四

受访解说：

201 T：那你怎么知道这里是$\frac{1}{6}$？

202 S：$\frac{13}{6}$的话，因为 6 的 2 倍是 12 嘛，然后他就是 6 的 2 倍多一点点（所以就是 比 2 多一点），然后取一个概数，$\frac{13}{6}$大概取在这里啊。

203 T：你是画 5 个点将 1 六等分，还是先找$\frac{1}{2}$？

204 S：好像是找$\frac{1}{2}$诶！

205 T：找到$\frac{1}{2}$然后再…？

206 S：再分成 6 份。

207 T：你没有画出来 ，你要画出来呀，请你描出来

208 S：就先找 2，2 的一半就 1 啊，1 的一半$\frac{1}{2}$啊，将$\frac{1}{2}$三等分会有三份，找到$\frac{1}{6}$（小朋友边说边画）

209 T：那把$\frac{1}{6}$标出来

210 S：就在这里

211 T：那你觉得这边的$\frac{1}{6}$（指$\frac{1}{6}$）和这边的$\frac{1}{6}$（指$2\frac{1}{6}$的$\frac{1}{6}$）有没有一样长？

212 S：我觉得差不多，只是这边比较短一点（指$2\frac{1}{6}$的$\frac{1}{6}$）？

213 T：你有没有想过 2 个会一样长？

214 S：我有想一下、有比一下，只是 嘿嘿嘿

215　T：你可以解释一下$\frac{1}{2}$和$\frac{1}{6}$的关系吗？

216　S：$\frac{1}{2}$是$\frac{1}{6}$的 3 倍。

217　T：$\frac{1}{6}$是$\frac{1}{2}$的几倍？

218　S：0.3 倍

219　T：$\frac{1}{6}$是$\frac{1}{2}$的几分之几？

220　S：$\frac{1}{3}$。

分析二

由【行号 201】可以发现小美仍是先将假分数转化成带分数以判断其约略的位置。不过从【行号 208】看来，研究者认为小美拥有如此的先备知识(资源)，即了解如何藉由 1 找到$\frac{1}{2}$进而从$\frac{1}{2}$切割 3 等分取得$\frac{1}{6}$，并能将此先备知识（资源）应用于作图的策略(捷思)上，只是仍未能将$\frac{1}{2}$准确划分成 3 等分(如图四所示)。再经逐字稿与小美的作图两者比对分析后，研究者认为小美了解如何将$\frac{1}{2}$切割 3 等分，只是在作图上省略了。

但是前后两段的$\frac{1}{6}$并不等长(图四)，可见她的后设认知仍未充分的发挥。

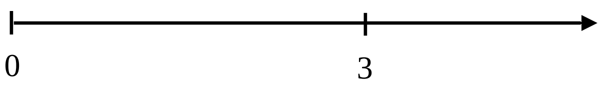
经研究者提醒小美「那你觉得这边的$\frac{1}{6}$（指$\frac{1}{6}$）和这边的$\frac{1}{6}$（指$2\frac{1}{6}$的$\frac{1}{6}$）有没有一样长？」【行号 211】，而根据小美的响应「我有想一下，有比一下，只是 嘿嘿嘿」【行号 214】，研究者认为小美作图时曾经思考过这个问题，也有实地动手比较，不过前后两段的$\frac{1}{6}$严格说来并不等长(图四)，但整体而言，小美此题的监控能力，已经比画上一题时要好了。

二、基准量为 3 的情境

原案三

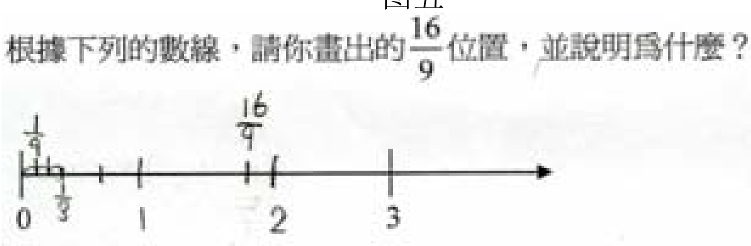
问题：

根据下列的数线，请你画出$\frac{16}{9}$的位置，并说明为什么？



图五

小美的初始解题：



受访解说：

301　T：你可以说明一下这一题吗？

302　S：因为 9 乘以 2 等于 18 啊，但它（指$\frac{16}{9}$）还不到啊，那 1 的话应该在这边，2 的话应该在这边，然后就直接分成 9 份了 或者也可以把它分成 3 个啦，就是把它分成 3 份，然后这里就是 1 啊，把 1 等分成 3 份，一个就是$\frac{1}{3}$，然后再把$\frac{1}{3}$分成 3 份就是$\frac{1}{9}$，因为这里就是 18 嘛（学生指 2 的地方），16 就是比他少一点点。

303　T：18 在哪里？

304　S：因为这里是 2 嘛，2 的 9 倍就是 18，所以就是 18，比 18 少一点点 这边就是 16 少一点点、差一点点

305　T：少一点点？

306　S：对

307　T：$\frac{18}{9}$在这里（指标记 2 的地方），所以$\frac{16}{9}$大概就在这里

308　S：对

309　T：你要说 $\frac{16}{9}$要在$\frac{18}{9}$前面几格

310　S：前面几格喔，前面 2 格

311　T：好，很好

分析三

小美一如往昔地习惯将分数拉回整数来做思考，再藉由整数略估分数的位置，且由【行号 302】也可看到小美拥有两种找到$\frac{1}{9}$的方式的先备知识（资源）。而在作图的策略（捷思）上，小美选择以$\frac{1}{3}$为媒介的作图方式，更准确地画出$\frac{1}{9}$。

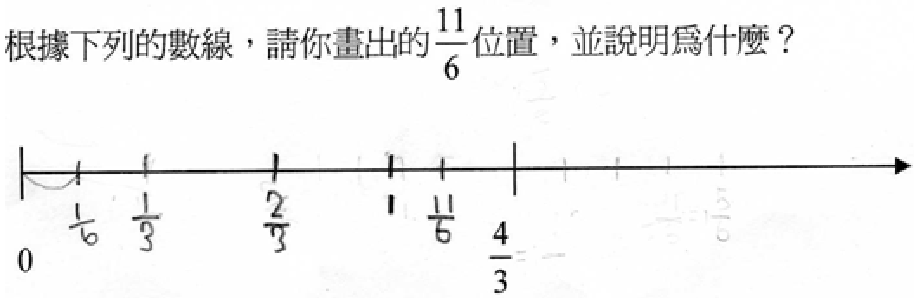
当研究者希望小美可以更精准的说出$\frac{16}{9}$与$\frac{18}{9}$的间隔，「你要说 $\frac{16}{9}$要在$\frac{18}{9}$前面几格？」时，小美答道「前面 2 格」【行号 304-310】，并对照其作图（如图六）研究者认为小美于此题的监控能力相较前两个原案来得更好，运用在图形表征上的捷思也更为精辟。

三、基准量为分数的情境

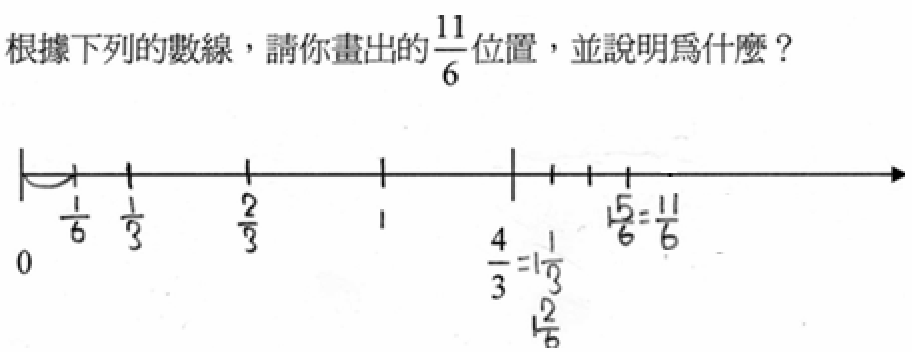
原案四

问题：

根据下列的数线，请你画出$\frac{11}{6}$的位置，并说明为什么？



图七 教学前-小美的解题方式



图八 教學後-小美的解題方式

401 S:我把它画出来好了，因为$\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}=1\frac{2}{6}$，$\frac{11}{6}=1\frac{5}{6}$，所以 5－2＝3，所以他们 2 个就是差了 3 格$\frac{1}{6}$，然后就大概…怎么说呢

402 T:怎么说呢

403 S:取个概数吧，我想

404 T:为什么用概数呢?

405 S:大概的啊！运用$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$的话就是 1 的$\frac{1}{3}$，好吧，假装 1 在这里好了

406 T:你刚才写$1\frac{2}{6}$，然后差 3 格，对不对

407 S: 对！所以他们差了 3 格$\frac{1}{6}$ 然后因为$1\frac{1}{3}$，所以是 3 份中的一份，所以如果 1 在这里的话…

408 T:1 在哪里?

409 S:如果 1 在这里的话

410 T:1 不能用如果，因为$\frac{4}{3}$的位置就决定 1 的位置了，

411 S: $\frac{4}{3}$在这里，分成 4 格，那一格就是$\frac{1}{3}$，那 3 格就是 1 了，这里是 1，这里加上这一格就是 $1\frac{1}{3}$，再把$\frac{1}{3}$分成 2 格，因为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，所以$\frac{1}{3}$的一半就是$\frac{1}{6}$了，所以这一段长就是$\frac{1}{6}$了

412 T:哪一段是$\frac{1}{6}$？

413 S:这里

414 T:你把$\frac{1}{3}$标出来，也把 1 标出来

415 S:这里是 1，所以….我好像画错了，所以这边是$\frac{1}{3}$，那这里就等于 $1\frac{1}{3}$，就是 $1\frac{2}{6}$，因为和 $1\frac{5}{6}$差了 3 格$\frac{1}{6}$，所以差了 3 份，恩！我画的好像不太对

416 T: $1\frac{5}{6}$比 $1\frac{2}{6}$大还是小?

417 S: 比 $1\frac{2}{6}$大

418 T:但是这里是 $1\frac{2}{6}$诶。

419 S: 对厚 我真的搞错了，它比 $1\frac{2}{6}$多 3 格，所以这里是 $1\frac{5}{6}$

420 T:多 3 格，那你怎么找到 $1\frac{5}{6}$？

421 S:（思考一会儿）就对一下

422 T:有对一下，是不是?好！很好！

分析四

【行号 401】可以看出小美的解题策略，先藉由分数运算找出$\frac{11}{6}$与题目基准量$\frac{4}{3}$相差 3 格$\frac{1}{6}$，并期以透过$\frac{1}{3}$而找到$\frac{1}{6}$【行号 405】，进而得到答案。小美的解题策略（捷思）是正确的，不过小美并未发挥监控能力，以致于未发现她标示的 $1\frac{5}{6}$在 $1\frac{2}{6}$左边的明显错误，且解题思维却仍采取略估的方式。

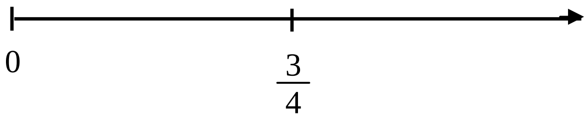
然而，当无法从数线中立即看出 1 的位置时，小美便自行假设 1 的位置【行号 403-407】，研究者认为小美略估位置的解题思维影响其解题策略甚深，使得小美在整体决定（监控）上容易含糊带过而造成解题错误。

经由老师提点「不能用如果，因为$\frac{4}{3}$的位置就决定 1 的位置了」，小美重新省思，从最基本的$\frac{4}{3}$分成 4 格，一格即是$\frac{1}{3}$进而找到 1 的正确位置，并且从$\frac{1}{3}$推出$\frac{1}{6}$的位置【行号 411】。且透过口语说明，小美发现了他的作答（即 $1\frac{5}{6}$ 与 $1\frac{2}{6}$ 的关系）似乎有些矛盾，尔后经过老师提问【行号 416】的再次强化，小美确认自己的作答错误并重新解题。而当老师询问，是否使用略估的方式找出多的 3 格，小美表示有比对一下【行号 420-21】，由此研究者认为小美有「比对一下」的动作，将会慢慢培养监控分数准确位置的能力。

原案五

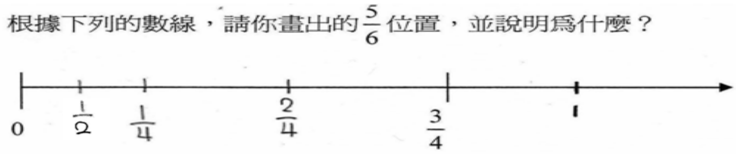
问题：

根据下列的数线，请你画出$\frac{5}{6}$的位置，并说明为什么？



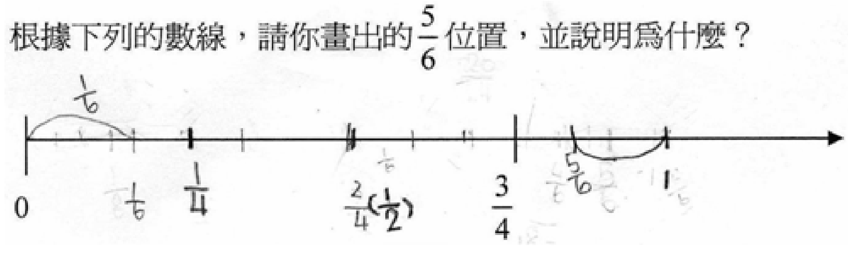
图九

<u>小美</u>初始解题：



<u>小美教学后</u>解题：

图十



图十一

受访解说：

501　T：你怎么知道 1 在那里呢？

502　S：因为它是$\frac{3}{4}$，就是 4 份中的 3 份，不到一啊，这一段就是三份，平均分配一份就是$\frac{1}{4}$，所以 1 在这里。

503　T：那你怎么决定$\frac{5}{6}$？

504　S：就是...这样变成一格就是$\frac{1}{3}$【指着$\frac{1}{4}$的位置】

505　T：那格变$\frac{1}{3}$？

506　S：这里啊！

507　T：是吗？

508　S：⋯⋯

509　T：这一段是多长？【指着$\frac{1}{4}$的位置】

510　S：如果不看 1，这里就是$\frac{1}{3}$。

511　T：这里是$\frac{3}{4}$啊，不能看成 1 啊！

512　S：我不会讲耶⋯

513　T：这里明明是$\frac{3}{4}$，你不能看成 1 啊！

514　S：好吧，如果这是$\frac{3}{4}$，那这里变成就是$\frac{1}{4}$

515　T：好，$\frac{1}{4}$决定下来啰！

516　S：然后呢！这是$\frac{1}{4}$，那这段就是$\frac{1}{2}$【指着$\frac{1}{8}$的位置，图十】

517　T：不对，是$\frac{1}{8}$。

518　S：耶⋯对厚！

分析五

从【行号 502】可以发现，小美能理解$\frac{3}{4}$有 3 个$\frac{1}{4}$，并且可以由此推导出 1 的位置，不过之后，研究者问「那你怎么决定$\frac{5}{6}$？」，小美却错把$\frac{3}{4}$重新当作 1，而忽略了原先从$\frac{3}{4}$找出来的 1【行号 504-510】，由此我们可以看到小美的后设监控能力不够好。

而经过研究者的提醒「这里是$\frac{3}{4}$啊，不能看成 1 啊！」【行号 511】，小美发现数在线$\frac{1}{4}$的位置是$\frac{1}{4}$而非$\frac{1}{3}$【行号 514】，然而却又误判$\frac{1}{4}$的一半等于$\frac{1}{2}$【行号 516】。研究者认为可能是因为小美其先备知识不稳固所致，或是一时无心之过所导致的错误。

原案六(针对原案五的部份做鹰架教学)：

601　T：其实你的$\frac{1}{2}$已经画出来了！你没注意到而已！

602　S：⋯⋯(沉默)

603　T：好!老师提示你喔！这里的$\frac{2}{4}$就是$\frac{1}{2}$。你的$\frac{1}{2}$已经画出来了。

604　S：恩！

605　T：你的 1 在这里，所以$\frac{1}{2}$在这里，也就是$\frac{2}{4}$在这里，现在你要从$\frac{1}{2}$去决定$\frac{1}{6}$。

606　S：$\frac{1}{6}$…这样就是分成三份，就是$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$ 【图十一】。

607　T：对！$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$就是把$\frac{1}{2}$三等份。只是$\frac{1}{6}$有多长呢？

608　S：呃…等一下我好像画错了！等一下…然后…如果这个有三等份的话，那就是…

609　T：可是这一段是$\frac{1}{4}$呢，从$\frac{1}{4}$三等份，这样对吗？但是我们要从$\frac{1}{2}$三等份。$\frac{1}{2}$三等份才是$\frac{1}{6}$。

610　S：那么这样长就是$\frac{1}{6}$啦有点搞迷糊了！思考中.... ………恩，

611　T:不对！因为这一段只有$\frac{1}{4}$长，这一段是$\frac{1}{2}$，三等份，那这$\frac{1}{4}$就不要看了！因为我们不需要画$\frac{1}{4}$，我们把$\frac{1}{2}$三等份，找出$\frac{1}{6}$的位置！

612　S:$\frac{1}{6}$就是在这里，1 在这里，回头利用 $1-\frac{1}{6}$，那我们就找$\frac{5}{6}$。

613　T：好！那要讲一次给老师听！说说看！

614　S：他是$\frac{3}{4}$代表这里分成三份，那这里就是$\frac{2}{4}$，$\frac{2}{4}$就是$\frac{1}{2}$，把$\frac{1}{2}$三等份，$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$那就是$\frac{1}{6}$，或者说$\frac{1}{2}$就是$\frac{3}{6}$，三等份也是$\frac{1}{6}$，那 1 就是$\frac{6}{6}$嘛，所以 $1-\frac{1}{6}$就是$\frac{5}{6}$。

分析六

然而此题最为重要的关键即是发现$\frac{2}{4}$为$\frac{1}{2}$，不过小美却未发现此重要关键，而$\frac{1}{2}$没有找出来，则无法准确画出$\frac{1}{6}$，因此研究者继续进行鹰架教学。后来小美虽知道 $\frac{1}{6}$是$\frac{1}{2}$的$\frac{1}{3}$，不过，小美未以$\frac{1}{2}$为参考点，三等分得到$\frac{1}{6}$，可能是她认为$\frac{1}{6}$小于$\frac{1}{4}$，可能要把$\frac{1}{6}$画在$\frac{1}{4}$的左边所影响，也可能是其它因素，导致于未利用$\frac{2}{4}$的坐标，即是$\frac{1}{2}$的位置，做出精确的$\frac{1}{6}$【行号 608;610】，故当老师明确地提点她之后，小美即能用自己的话再重新诠释一次【行号 614】。

伍、综合讨论

综合上述解题表现，研究者依据基准量为整数与分数的二类工作单问题类型与个案解题特色，兹分为资源、捷思、监控、信念等四部分，提出讨论与解析，分述如下：

（一） 资源：小美拥有分数之间倍数与大小关系的先备知识，但尚未建立「单位长是一个问题中所设定的不变量」的观念。

了解题意之后，必须根据题意之条件，从自身就经验中搜集相关性的问题或数学概念帮助设计一个可能性成功的解题计划（Polya, 1957）。于原案二，小美了解$\frac{1}{2}$与$\frac{1}{6}$的关系，并能说出$\frac{1}{2}$是$\frac{1}{6}$的三倍，以及$\frac{1}{6}$是$\frac{1}{2}$的$\frac{1}{3}$倍；原案三小美则能将 2 化为$\frac{18}{9}$，往左边寻找$\frac{16}{9}$的位置；原案四，小美能将$\frac{4}{3}$化成$1\frac{1}{3}$与$1\frac{2}{6}$，并藉由分数运算找出$\frac{11}{6}$与$1\frac{2}{6}$相差 3 格$\frac{1}{6}$，进而寻找到$1\frac{5}{6}$的位置；而在原案五，小美也能透过$\frac{3}{4}$有 3 个$\frac{1}{4}$而推导出 1 的位置。

综合以上所述，研究者发现在基准量为整数的解题表现中发现小美先将假分数化成带分数，并能使用约扩分方式先找到整数的位置，再约估分数的位置；而在基准量为分数的情境下，小美将假分数转换成整数加上单位分数这样的观念成为小美解题策略的首要资源。总体而言，研究者认为小美已拥有充足的解题资源，也就是拥有先备的知识以作为成功解题的基石。

不过，小美虽拥有正确解题资源，却因自行假设数线 1 的位置，而造成解题错误，由此可知，小美对于数在线 1 的位置是固定不变也就是单位长不变性的概念薄弱，所以在基准量为分数的情境下无法顺利将解题资源运用在策略上。

（二）捷思：小美未能充分利用先备知识（资源）发展出解题策略以标示分数的位置。

Schoenfeld（1985）认为解题者在解非例行性问题时所利用的策略和技巧，包含简化问题、画图等等皆称为捷思法。研究者分析发现，一开始小美未能将其解题资源运用在作图上，且因习惯以略估的思维方式解题，以致于不能精确地画出正确位置，不过从原案二、三的解题脉络可以看到小美的作图有越来越精准的趋势，直至原案三，小美已能透过$\frac{1}{3}$为媒介，精准地画出$\frac{1}{9}$。

然而，于原案六，小美虽能知道$\frac{2}{4}$等于$\frac{1}{2}$，不过却无法将此先备知识，$\frac{1}{2}$取 3 等分即为$\frac{1}{6}$，运用于解题上，因此无法顺利画出$\frac{1}{6}$，进而找出$1\frac{1}{6}$的位置。

（三）监控：在初始解题时未发挥监控能力，尔后经由师生互动，监控能力逐渐成长。

Schoenfeld（1985）认为在解题时，对于资源与策略的选择与执行的整体决定，包含计划、决策的评估与有意义的后设认知都是属于监控的一部份。研究者分析原案一至三发现，原案一小美的作图前后$\frac{3}{8}$明显不等长，此时的监控能力最差，不过原案二、三小美的作图越来越精确，也会有作答完的监控动作，例如她有比对一下是否等长的动作。

而在基准量为分数的情境下，如原案四，小美未发现自己的作答$1\frac{5}{6}$小于$1\frac{2}{6}$是明显不

合理的情况；原案五之图十，小美将$\frac{1}{4}$取其半，而标示$\frac{1}{2}$，此时也未发挥监控能力去注意到$\frac{1}{2}$不会比$\frac{1}{4}$小，且虽理解如何从$\frac{3}{4}$找到 1，不过当老师问怎么决定$\frac{5}{6}$时，小美却忽略了已经找到的 1，而错把$\frac{3}{4}$当 1 来作答，由上述可以得知小美对于以分数为基准量的问题学习上感到较困难，且监控能力似乎较不稳固。

（四）信念：自行设定单位长，忽视以存在的隐藏「约定」

从原案一可发现，小美未考虑单位分数$\frac{1}{8}$的长度，自行在 1 右边约略订出$\frac{11}{8}$的位置。而原案五之图十一也可发现小美忽视$\frac{3}{4}$的位置，自行将$\frac{3}{4}$当作 1，因此误把$\frac{1}{4}$看成$\frac{1}{3}$，可以说是自行设定单位 1，而忽视$\frac{3}{4}$的事实。

研究者认为如此的解题行为可能是源自于课室的经验，例如教师往往在黑板上画出不一样的单位长，使得学生误以为认为单位长是可以自行决定的；也可能是源自于课本的例子，不同例子中 1 的长度也可能差距很大，以 1 与$\frac{3}{4}$两个数而言，长度是可以改变的（variant），不过$\frac{3}{4}$与 1 的相对长度是不可能改变的（invariant），研究者认为如此的约定（convention）是隐藏（implicit）于教材之中，授课教师若不刻意强调此关系，一般学生可能不会察觉到如此对应的关系。

致　谢

本研究蒙国科会计划（NSC 94-2521-S-415-001;NSC 95-2521-S-415-004- MY3）经费补助，特致谢忱。

参考文献

吕玉琴（1996）。国小教师的分数知识。台北师院学报，9，427-460。

洪继贤、刘祥通（2004）。一位五年级学生解分数单位量等分割问题的表现。*科学教育研究*与发展季刊，35，页 53-75。（通讯作者：刘祥通）。

教育部（1993）。国民小学课程标准。台北：教育部编印。

教育部（2003）。国民中小学九年一贯课程纲要~数学学习领域。台北：教育部印制。

宁自强（1993）。单位量的变换（一）~正整数成除法运思的启蒙~。教师之友，34(1)，27-34。

宁自强（1995）。单位量变换（二）━正整数乘除运思的融合。教师之友，36(5)，35-44。

宁自强（1998）。涂景瀚的数概念。科学教育学刊，6(3)，255-269。

黄瑞琴（1991）。质的教育研究方法。台北：心理。

刘秋木（1996）。国小数学科教材教法。台北：五南。

刘祥通和周立勋（2001）：发展国小教师数学教学之布题能力—以分数乘除法教学为例。*科*学教育学刊，9(2)，15-34。

刘祥通（2007）。分数与比例问题题分析－从数学提问教学的观点。台北：师大书苑（再版）。

Behr, M. J., Harel, T., Post, T. R., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In Grouws, D. A. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.

296-333).New York: Academic Press, Inc.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh., & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and process* (pp. 91-126). New York: Academic Press, Inc.

Bright, G. W., Behr, M. J., Post, T. R., & Wachsmuth, I. (1988). Identifying Fractions on Number Lines. Journal for Research in Mathematics Education. 19(3). 215-232.

Confrey, J. (1994). Splitting, Similarity, and rate of change : a new approach to multiplication and exponential functions. In G. Harel & J. Confrey (Eds), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp.291-330). New York: Albany Press, Inc.

Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O. (1984). Children learning mathematics: A teacher's quide to recent research. Oxford, England：Schools Council Publications.

Goldin, G.A. (2000). A scientific perspective on structured, tasked-based interviews, in mathematics education research. In A.E. Kelly & R.A Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, (pp.517-545). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Guba, E. G. & Lincoln, Y. S.（1981）. *Effective evaluation：Improving the usefulness of evaluation results through responsive and naturalistic approaches*. San Francisco：Jossey-Bass.

Izsak, A. Tillema, E. & Tunc-Pekkan, Z. (2008). Teaching and learning fraction addition on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(1), 33-62.

Kerslake, D. (1986). *Children's Perceptions of Fractions*: The Tenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of ration number. In R. Lesh (Ed.), *Number and measurement : Paper from a research*(pp. 101-144). Columbus, OH:ERIC/SEMAC.

Lamon, S. J. (1990). *Ratio and proportion*: *cognitive foundations in unitizing and norming* (ERIC Document Reproduction Service No. ED325 335) .

Lamon, S. J. (1996). The development of Unitizing : Its Role in Children's Partitioning Strategies. *Journal Research in Mathematics Education, 27*(2), 170-193.

Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Marshall, S. P. (1993). Assessment of rational number understanding: A schema-based approach. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research*(pp.261-268) Hillsdale, NJ: Erlbaum.

McCloskey, A., & Norton, A. (2009). Modeling students' mathematics using Steffe's advanced fractions schemes. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15*(1), 44-50.

Norton, A., & McCloskey, A. (2008). Modeling students' mathematics using Steffe's fractions schemes. *Teaching Children Mathematics, 15*(1), 48-54.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. In J. Heibert & M. Behr (Eds), *Number concepts and operations in the middle grades*(pp.53-92). Reston, VA: NCTM.

Saenz-Ludlow, A. (1994). Michael's fraction schemes. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(1), 50-85.

Saenz-Ludlow, A. (1995). Ann's fraction schemes. *Journal for Research in Mathematics*

Education, *28*, 101-132.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving* . San Diego, CA：Academic Press, INC.

Steffe, L. P., & Cobb, P. (1988). *Construction of Arithmetical Meanings and Strategies.* NY: Springer-Verleg.

Steffe, L. P., von Glasersfeld, E., Richard, J., & Cobb, P. (1983). *Children counting type: Philosophy, theory and application.* NY: Praeger Publishers.

Tzur, R. (2000). An integrated research on children’s construction of meaningful, symbolic,partitioning-related conceptions, and the teacher’s role in fostering that learning. *Journal of Mathematical Behavior, 18,* 2, 123-147.