

探究国小六年级学童百分率问题之解题历程

陈文甄

嘉义县文昌国民小学 教师

刘祥通

嘉义大学数理教育研究所 教授兼所长

摘 要

本研究以嘉义县某国小六年级学生为访谈对象,深入探讨学生解百分率问题的思维脉络,厘清学生解题的迷思概念与困难为何。访谈进行前,学生先行填写研究者自编之「百分率文字题工作单」,内容包括「比较量未知」、「百分率未知」、「基准量未知」及「基准量改变」四种性质的8个百分率问题。研究者以工作单每一性质中,整体学生答对率相对较低的题目为访谈架构,逐一访谈个案学生解题的想法,每位学生访谈的题目共4题。

经由访谈发现,解题失败的学生中,一部份在问题转译阶段,即有了解题意的困难;另一部份问题转译正确,但无法整合题目与先备知识,或无法掌握百分率的基准为何,因而未能顺利解题;不易区辨题目中之基准量与比较量,是学生解百分率问题最主要的困难。解题成功的学生,能正确解读题意,运用先备知识,稳固掌握基准量,少数学生甚至有验算等解题监控的表现。而研究者的介入,透过题意的厘清,或与学生的对话,可帮助部份解题失败的学生完成解题。

【关键词】: 百分率、解题、基准量

壹、绪论

百分率是比率的一种表示方法,为掌握比率的大小与量感,将比率的分子固定为100,因而有百分率概念的生成。例如:将 $\frac{11}{27}$ 、 $\frac{5}{16}$ 换算为41%、31%,就很容易比较两者的大小。百分率在生活中的应用频繁:举凡出生率、投票率、录取率、存款利率及商品折扣.....等等,皆与百分率概念脱离不了关系。是否正确解读百分率数字的意义,深切影响我们的日常生活。

人们面临问题时，试图以先前获得的知识和经验来解决，因此学生应准备好面对现实生活中的挑战与问题，并寻找适当的解决方案（Ali, Hukamdad, Akhter & Khan, 2010）。应用题反应学童周遭环境常见的数量关系和实际问题，解决应用题必须使用语文、计算、问题分析以及数学概念的认知与应用能力。从定义清楚、目标明确的应用题，逐渐累积的解题经验，有助学童将数学方法进一步应用于解决生活中的问题。

国内九年一贯课程纲要明确点出学习数学时，生活应用的解题能力，和抽象符号的计算能力同等重要，同时也将「学习应用问题的解题方法」列为数学学习领域的四大教学总体目标之一。97 年修订的课程纲要也提出：「编撰教材时，须注意数学内部连结的贯串，以强调解题能力的培养；数学外部的连结……强调生活应用解题……」。由课程纲要可以看出，国内对培养解题能力的重视。而美国 NCTM（National Council of Teachers of Mathematics）2000 年提出的「学校数学课程原则与标准」，五项过程标准（解题、推理与证明、沟通、连结、表征）中，解题亦包含在内，足见对问题解决能力培养的重视（NCTM, 2000）。黄毅英与黄家鸣（1997）比较十个地区数学教育的研究报告中，也发现问题解决能力是各国数学教育共同强调的重点之一。

研究者的教学经验发现，与其它数学概念比较，学童在百分率单元的测验中，往往有相对较高的答对率，然而 Gay 与 Thomas(1993)针对七八年级学生的研究指出，学生答题正确，未必表示有正确的百分率概念。文字题解题过程中，在运用计算能力前，必须先能理解文字内容，构思解题策略，进而转换文字为抽象数学符号，最后才是计算的执行，环环相扣，每一步骤都影响解题是否顺利。学童的解题困难何在，是否存有迷思概念，是教师在教学上应正视的问题。学童相对较高的答对率，是否表示真的有正确的百分率概念，值得关注，再者，国内数学解题的相关研究中，内容很少针对学童的百分率概念进行了解。因此，本研究目的主要是，藉由研究者所设计的百分率问题，访谈并分析学童的解题历程，从中找出其解百分率问题的思维脉络，期使研究结果能够做为往后百分率单元的教学与相关教材编写的参考。

贰、文献探讨

一、解题的意义与历程

解题常被视为一个「过程」，知识的建构过程（喻平，2002）；应用旧知识于不熟悉情境的过程（National Council of Supervisors of Mathematics, [NCSM], 1989）；学生能经验、感受数学的有用、合理、力量之过程（NCTM, 1989）。解题也被定义为一个「情境」（Lester, 1980），为达到已设定目标，遭遇暂时性阻碍之情境。为寻求问题的答案，必须有问题表征与转译的知识，和引导知识与策略之选择的控制系统（Barba,

1990)。综上所述,「解題」即是個人面對問題,無法立即獲得解決方法,而嘗試整合舊經驗與先備知識,以期突破阻礙、達成目標的過程。而「數學解題」,即是解決數學問題,目的在提升學生認知的運作,是學習者運用過去的解題經驗與既有的數學概念,試圖為現有的數學難題尋求解決方法的過程。數學解題著重解題者解數學問題的思維過程,更甚於正確答案的獲得,過程中的每一步驟,都影響後續解題順利與否以及答案的正確性。探究各學者所提出之解題歷程如下:

(一)Polya 的解題歷程

Polya (1945/2006) 於 *How to solve it?* (中譯本: 怎樣解題) 書中, 將解題活動分成四個階段:

1. 了解問題 (Understanding the problem): 知道問題主要部份是什麼: 未知數、已知數和已知條件等, 並從不同角度考慮問題的主要部份。必要時, 運用合適的表征方法, 包括畫圖或是使用適當的符號、記號, 協助對於問題的了解。
2. 擬定計劃 (Devising a plan): 知道解決問題需要哪些計算、演算步驟或圖形, 才能求出未知數, 此時可算是有解題計劃。如果對問題無法產生想法, 則嘗試想想曾經解過的類似題, 甚至由其它角度出發, 改變、轉化或是修改原本的問題, 可能可以引導出一些適當的輔助問題, 進而發展出求解的計劃。
3. 執行計劃 (Carrying out the plan): 著手執行所擬定的計劃, 將解題計劃付諸實現, 並仔細檢查每一步驟。
4. 驗算與回顧 (Looking back): 藉由回顧求解過程, 再次驗算答案, 並思考解答過程, 考慮是否有其它的方法可以推導相同的結果, 更進一步, 把解題的方法或結果應用到其它問題上。

(二)Schoenfeld 的解題歷程

Schoenfeld (1985) *Mathematical problem solving* 書中, 將解題歷程分六個階段:

1. 讀題 (Reading): 閱讀題目的陳述, 注意題目所提供的條件與解題目標。
2. 分析 (Analysis): 讀完題目, 無法順利往下進行時, 嘗試將題目加以簡化或重構, 即是对题目的「分析」。
3. 探索 (Exploration): 廣泛的尋找相關訊息, 而比較遠離原始題目的內容, 發現有用的信息, 可能重回「分析」, 運用新信息更清楚的了解題目。
4. 計劃 (Planning): 依照其對題目的了解, 形成解題計劃。
5. 執行 (Implementation): 執行解題計劃。
6. 驗證 (Verification): 對解題的回顧, 也就是對自己的解題過程與結果的評估。

(三)Mayer 的解題歷程

Mayer (1991) 將數學解題分成**問題表征**與**問題解決**兩階段, 問題表征將問題的

文字或图表转化成为内在心理表征，细分为「问题转译」与「问题整合」；问题解决则由问题的心理表征开始，直到解题者获得最后的答案，包含「解题计划及监控」与「解题执行」：

- 1.问题转译 (Problem translation)：以其语言知识与语意知识，将问题的陈述转译为内在心理表征，除了基础的语言能力，亦需具备了解问题结构的能力。
- 2.问题整合 (Problem integration)：运用基模知识，亦即旧有的解题经验，提取问题中有意义的讯息，进一步对问题进行表征。
- 3.解题计划及监控 (Solution planning and monitoring)：了解问题后，以策略知识形成并监控解题计划。
- 4.解题执行 (Solution execution)：在表征问题与发展解题计划之后，解题者以程序性知识完成最后的计算步骤。

综合以上观点，解题首重对题意的了解，能正确掌握题意，后面解题计划的发展与执行才有意义。了解问题后，解题者须将问题与个人具备的数学概念加以整合，例如百分率的题目，除了百分率概念，需配合母子和与母子差等数学概念，解题者依个人的数学概念提取问题中的有用讯息，进行问题整合，而后进入解题计划阶段。后设认知「监控」可能在读题与了解题意时，即发挥作用；也可能在解题执行完成后，运用答案来验算进行监控；能力强的解题者，其内在的监控运作，甚至可能在整个解题历程中持续发挥。学生解百分率问题时，解题历程各阶段的表现如何，是本研究欲探讨之课题。

二、百分率相关研究中学童的解题表现分析

Lembke 与 Reys (1994) 所做的横断研究指出，学生解计算题的策略，可归类为参考点、方程式、分数、比例、画图、计算与检验及试误七类。尚未学习百分率课程的 5 年级学生，与粗浅认识百分率概念的 7 年级学生，最常使用的策略是「参考点」，利用常见的百分率数值（例如：100%、50%、25%.....）来推估答案，或检验以其它策略获得的答案是否正确；其次常用的策略是「分数」，将百分率转换为分数，例如：将 25% 换成 $\frac{1}{4}$ ，再进行后续的处理。而百分率教学集中的 9 年级学生，和百分率课程已结束超过一年的 11 年级学生，所使用的策略以「方程式」为最多，例如：36 是多少的 12%？学生写下方程式并计算 $36=0.12 \times wn$ (what number)；9、11 年级学生其次常用的策略是「参考点」及「分数」。

研究者认为，Lembke 与 Reys 的研究中，5 年级学生尚未正式接触百分率课程，已能运用日常生活中与百分率相关的经验和学过的数学概念来解百分率问题，而 9、11 年级已学习以算则为主的百分率课程，亦能有多样的解题策略呈现，国内百分率概念教学趋于完备的六年级学童，处理百分率问题的解题策略如何，值得探究。

van den Heuvel-Panhuizen (2004) 的研究題目：「果醬包裝有兩種，大罐裝 450 克，卷標顯示水果含量為 60%，問大罐果醬中水果有幾克？又小罐裝 225 克，水果含量標籤忘了貼，問小罐果醬的水果含量幾%？」後半段用來評量學生是否了解：無論總量如何改變，只要混合物的比 (ratio) 相同，百分率就相同，又學生的百分率概念是否穩固到足以支撐視覺上的轉移 (distractor)。結果發現，39 名學生中，16 名學生能運用合理的策略計算大罐果醬的水果有幾克，卻只有 4 名學生答對並正確解釋小罐果醬的水果含量也是 60%，答錯的學生中，25 名學生的答案是 30%，其解釋是小罐裝 225g 是大罐裝 450g 的一半，所以小罐裝的水果含量是大罐裝 60% 的一半，也就是 30%。學生的百分率概念不穩定，因題目的圖像表征而動搖，影響其於此問題的答題。

而 39 名學生中，只有 7 名答對「糖果棒增量 25%，價格不變，問新包裝的價錢折扣是多少%？」且能正確解釋新包裝的價錢折扣是 20%。14 名學生認為糖果棒增量 25% 也就是價錢折扣 25%。此題目中隱含兩不同的基準量，應是解題困難之處。

國內對於學童解百分率問題的研究付之闕如，而由前述文獻，可以發現，國外有關百分率解題的研究，重點多集中在討論學生所用的策略以及解題的錯誤，關注的焦點是解題的結果，而有關學生解百分率問題的過程，也就是在解題歷程各個階段的表現如何，則未見相關研究深入討論，此部分實有探討之價值。因此，本研究在前人研究成果與國內百分率課程的基礎上，自編百分率文字題工作單，分析探討學生百分率問題的解題歷程。

叁、研究方法

本研究採個案研究法，以「結構式工作單晤談法」搜集資料。參考國內外百分率相關文獻及國內各版本數學教材，自編「百分率文字題工作單」。工作單內容連結百分率概念及其它數學概念，例如：母子和、母子差、比例等。題目依性質分為「比較量未知」、「百分率未知」、「基準量未知」及「基準量改變」四類。同一類中，再區分出「易」與「難」兩種程度，每一程度有 1 個題目，題目的已知條件各不相同，共 8 題，工作單架構如表 1 所示：

表 1 「百分率文字題工作單」架構

性質	難 易 度	
	易	難
比較量未知	(1)比較量、百分率	(5)基準量、百分率
百分率未知	(2)基準量、百分率	(6)基準量、比較量、百分率
基準量未知	(3)比較量、百分率	(7)比較量、百分率
基準量改變	(4)基準量、百分率	(8)百分率

*()內的數字表示題號，文字為各題之已知條件

工作单的施测对象为嘉义县某国小三班共 86 位六年级学生，研究者于工作单施测完成后，初步分析整理各题目的答对率、答对学生的解题类型以及答错学生的主要错误类型，并以学生在工作单第 5 题：「某水果商以每斤 40 元的价格买进水果 50 斤，依过去的经验，有些水果会卖不出去，而卖出去的比率是 80%，水果商如果想赚 20%，每斤应该卖多少元？」的解题表现，来筛选访谈个案。此题叙述呈现许多讯息：「水果进价」、「水果斤数」、「卖出比率」、「预期赚率」，须先正确了解题意，而后经多步骤计算才能成功解题，题目难度足以反应学生解百分率问题的表现之高度落差：有人思路清晰而能呈现出不同于研究者的解题策略，也有人可能在问题转译阶段即面临困难，无法解题。因此，本研究依据学生在此题的不同解题表现来选取访谈个案。参与访谈之个案学生的数学学习背景如下：

1. 小于 (S5)：工作单答对 3 题，其中包含难度高的第 5 题。数学程度中等，直线思考，遇到不曾做过或较难的数学题目，往往解题失败，但态度积极，努力学习期待突破。
2. 小瑄 (S6)：工作单答对 7 题，第 5 题解题方法特殊，不同于其它答对的学生。平日课后参加数学补习活动，态度积极，表现优秀，愿意努力思考、尝试解决数学难题。
3. 小浩 (S4)：工作单答对 7 题，只错第 5 题。数学学习表现优秀，不曾参与课后补习，面对不曾学习过的数学概念或非例行性数学题目，往往积极面对挑战，会努力尝试以自己的数学概念来解题。
4. 小珊 (S2)：工作单答对 6 题，第 5 题只写一行算式，未完成解题。平日参加课后补习活动，头脑灵活，能举一反三，数学学业成就佳，成绩一直维持一定水平。

访谈的进行，根据工作单中的百分率问题以及个案学生于工作单上所呈现的解题纪录，以一对一的方式，进行深入访谈，访谈内容为工作单每一性质题目中，全体学生答对率较低的题目。后续以阶段区分最简要明确的 Polya 解题历程四阶段：「了解问题」、「拟定计划」、「执行计划」及「验算与回顾」，做为访谈资料的分析架构。为求资料分析的客观，提高研究的信效度，在访谈对话数据的编码过程中，与研究同侪共同讨论修正，做为人员的三角校正，并在编码完成后，配合学生「百分率文字题工作单」的解题纪录，反复进行交叉比对整理，以做数据的三角校正。

肆、结果与讨论

受限于篇幅，仅以题目难度较能呈现学生解百分率问题样貌的「比较量未知」与「基准量未知」两题，来分析说明小于、小瑄、小浩、小珊 4 位学生的访谈结果，其

解題歷程如下：

一、六年級學童解「比較量未知」百分率問題的解題歷程

題目：【問題 5】某水果商以每斤 40 元的价格买进水果 50 斤，依过去的经验，有些水果会卖不出去，而卖出去的比率是 80%，水果商如果想赚 20%，每斤应该卖多少元？

(一)原案一【訪談對象：小於】

1. 小於能正確理解第 5 題的每一個數字在題目中的意義。

由原始解題紀錄圖 1 來看，小於正確利用已知條件，順利解題。經由訪談，確認小於運用了「每斤 40 元」與「買進水果 50 斤」兩個訊息，計算總成本 (0101S5)，再將「買進水果 50 斤」與「賣出去的比率 80%」相乘，計算出實際賣出的是 40 斤 (0103S5-0105S5)，此為小於了解問題的表現。

2. 小於整合「水果商想賺 20%」、「總成本 2000 元」與「實際賣出 40 斤」三個條件，正確解題。

小於將總成本 2000 元，乘以「水果商想賺 20%」，計算出水果商想賺 400 元 (0102S5)，加上買水果的總成本 2000 元，是為水果商期待回收的總收入 2400 元 (0108T-0109S5)，最後將期待的總收入 2400 元，除以實際賣出的 40 斤，得到每斤應該賣 60 元 (0107S5、0111S5)。透過訪談對話，發現小於**擬定正確之解題計劃**，充分運用題目提供之已知條件，順利解題。

0101S5: 2000 是他買了 50 斤，每斤 40 元，2000 是他買了 50 斤的錢

0102S5: 乘以 20%...他如果想賺 20% 的話，是多少钱，答案就是 400

0103S5: 先算出那個 50 斤裡面大概會賣出幾斤，

0104T: 那你怎麼算？

0105S5: 50 乘以 80%，因為他說賣出的比率是 80%，所以他只有賣出 40 斤

0106T: 然後呢？

0107S5: 之後 2000 加 400...，除以他應該會賣出 40 斤，所以 2400 除以 40

0108T: 2400 是什麼？

0109S5: 就是他...買水果花的錢加上他想賺的錢，就是他想收回來的錢

0110T: 嗯

0111 S5: 就是他如果想要賺 20% 的話，應該要賣 60 元，每一斤賣 60 元

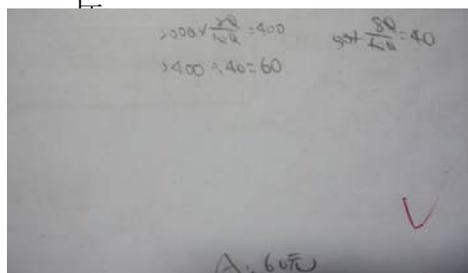


圖 1 小於第 5 題的原始解題記錄

小予的解题过程，正确了解问题题意，且拟定计划整合所有题目之已知条件，先计算预期总收入 2400 元，与实际应可卖出的水果量 40 斤，相除后顺利完成解题。

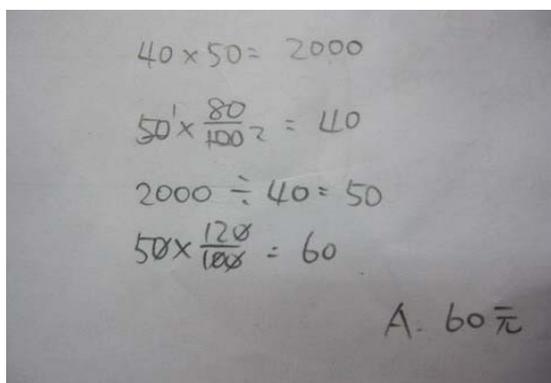
(二)原案二【访谈对象：小瑄】

1. 小瑄理解第 5 题的每一个数字在题目中的意义。

小瑄的原始解题纪录如图 2，整合运用题目已知条件，正确解题。访谈发现，小瑄解法与其它答对的学生不同，思路清晰。首先利用「每斤 40 元」与「买进水果 50 斤」两条件，计算总成本 (0201S6)，再将「买进水果 50 斤」与「卖出去的比率 80%」相乘，计算出实际卖出的是 40 斤 (0202S6)，此为小瑄了解问题的表现。

0201S6: 第一行 40 乘以 50 是算全部的钱...全部买水果花的钱

0202S6: 50 乘以 $\frac{80}{100}$ 是卖出去的重量



40 × 50 = 2000
50 × $\frac{80}{100}$ = 40
2000 ÷ 40 = 50
50 × $\frac{120}{100}$ = 60
A. 60元

图2 小瑄第 5 题的原始解题记录

2.小瑄整合「总成本 2000 元」、「实际卖出 40 斤」与「水果商想赚 20%」三个条件，正确解题。

小瑄拟定计划利用自己算出来的总成本 2000 元，和实际卖出的水果量 40 斤，计算在不赚不赔的情况下 (0205T-0206S6)，每斤要卖 50 元，而后以想赚钱就要卖贵一点的想法 (0206S6)，以及母子和的概念处理「水果商想赚 20%」(0204S6)，将每斤 50 元乘以 120%，计算得到答案：想赚 20%，每斤要 60 元。

0203S6: 2000 除以他卖出去的重量，就是每斤要卖 50 元

0205T: 每斤 50 元是有赚钱还是没赚钱

0206S6: 没有，所以要卖贵一点，再乘以 120%

0204S6: 因为他说想赚 20%，所以再乘以 120%

小瑄的解题过程，正确了解问题题意，并拟定计划整合所有题目给定之已知条件，先计算不赚不赔的情况下，每斤要卖 50 元，再以母子和概念处理「水果商想赚

20%」，將每斤 50 元乘上 120%，順利完成解題。

(三)原案三【訪談對象：小浩】

1. 小浩對第 5 題的題意存有疑慮，針對題目中水果商想「賺 20%」的基準為何，提出問題。

小浩的原始解題紀錄如圖 3。訪談過程，嘗試重新解題如圖 4，在了解問題時，小浩對於「賺 20%」的基準為何感到疑惑，主動詢問賺 20% 是指賣出的 80% 的 20%，還是全部 100% 的 20% (0301S4)，研究者說明後，小浩順利擬定計劃，整合「每斤 40 元」、「水果 50 斤」和「水果商想賺 20%」三者，計算出水果商如果想賺 20%，總收入要 2400 元，再除以水果 50 斤，每斤要賣 48 元 (0311S4)。

0301S4: (寫下 $40 \times 50 \times \frac{8}{10}$ 後停頓)，想

賺 20% 是 80% 的多 20%，還是 100% 的多 20%？

0302T: ...你再說一次你的問題

0303S4: 就是把每一斤都算好之後，他 80% 是賣出去的，他要算的是賺的，如果賺 20% 是....他的基準量是總共的水果，還是賣出去的水果，

0304T: 就是他花出去的钱，那个想賺 20% 是指他

0305S4: 所有買水果的钱

0305T: 嗯

0307S4: 所以就不能乘以 $\frac{8}{10}$ ，要直接乘

以 120%，(畫掉 $\frac{8}{10}$ ，改為

$40 \times 50 \times 120\% = 2000 \times 120\% = 2400$)

0308S4: 2400 (自言自語)

0309S4: (寫下 $2400 \div 50 = 48$)，48

0310T: 你告訴我剛剛在算什么？

0311S4: 就是每斤 40 元，有 50 斤，所有的錢是 2000，要賺 20%，就是乘以 120%，等於 2400，然後再除以 50 斤，等於每斤賣出去會賺 20% 的話，就 48，就是每斤要賣 48 元。

賺 20% 每斤應該買多少元？

$$40 \times 50 \times \frac{8}{10} = 1600$$

$$\frac{(1600 + X)}{2000} = 120\%$$

$$\Rightarrow X = 800$$

A: 42.5元

圖3 小浩第 5 題的原始解題記錄

$$40 \times 50 \times 120\% = 2000 \times \frac{12}{10} = 2400$$

$$2400 \div 50 = 48$$

$$48 \times 50 = 2400$$

圖4 小浩第 5 題訪談中的解題記錄 1

2. 小浩的解题忽略「卖出去的比率 80%」, 经研究者提示后, 成功解题。

小浩拟定之解题计划并不完整, 忽略题目提及水果卖出去的比率只有 80%, 在研究者提问「卖出去的水果是全部的吗?」后, 小浩表示因为总收入一定要 2400 元 (0321S4-0323S4), 50 斤完全卖出, 每斤卖 48 元, 只有卖出去 80%, 则以 $48 \div 80\%$, 每斤要卖 60 元(0324S4)。解题过程中, 并有**验算与回顾**的行为表现(0314S4-0319S4)。

0312T: 可是他卖出去的是全部的吗?

0313S4: 80%, 所以 48....., (写下

$$48 \times \frac{10}{8} = 60)$$

0314S4: 如果只有卖 80% 的话, 每斤卖

60 元, (口中念念有词)

0315S4: (面露微笑) 对! 是 60

0316T: 为什么? 你刚刚在验算吗?

0317S4: 嗯

0318T: 你怎么验算?

0319S4: 心算

0320T: 可不可以告诉我? 我想听你验算的过程

0321S4: 他说乘以 120%, 是他一定要赚到 2400

0322T: 2400 是赚到的? 还是全部的收入?

0323S4: 全部

0324S4: 他说 50 斤是每斤 48, 可是只有 80% 会卖出去, 除以 80% 等于 60, 60 是他卖出去的每一斤要卖

3. 小浩以逆向法验算答案的合理性。

研究者请小浩写出并说明验算过程, 小浩在一阵自言自语与混乱的计算之后, 写下 $60 \times (50 \times \frac{4}{5}) = 2400$, 如图 5。小浩表示水果只卖出 80%, 因此 50 斤只卖出 40 斤 (0337S4), 又每斤卖 60 元, 相乘后得到 2400 元 (0341S4), 就跟水果商想赚的钱一样。由此可见小浩确实在解题完成, 得到答案水果每斤卖 60 元之后, 又重新代入题目中, 确认自己的答案正确, 此为其**验算**的表现。

$$60 \times (50 \times \frac{4}{5})$$

$$= 60 \times 40$$

$$= 2400$$

图5 小浩第 5 题访谈中的解题记录 2

0325T: 你剛剛怎麼驗算? 請你寫一下
驗算的過程

.....

0336S4:我想一下, (寫下 $60 \times (50 \times \frac{4}{5}) = 2400$)

0337S4: 因為他總共 50 斤水果, 可是他賣出去的是 80%, 就是 0.8, 把 50×0.8 , 0.8 是 $\frac{4}{5}$, 就是 40,

小浩對於「水果商想賺 20%」的基準為何, 有了解問題的困難。經研究者協助厘清題意後, 小浩**擬定計劃**, 順利整合「每斤 40 元」、「買進 50 斤」、「水果商想賺 20%」三個條件。而「賣出去的比率 80%」此一訊息, 則有賴研究者的提示, 小浩才將其運用於解題之中。此外, 訪談證實小浩有**驗算**的表現。

(四)原案四【訪談對象: 小珊】

1. 小珊認為水果賣出 80%, 應該會賠 20%, 與題目敘述「賺 20%」互相矛盾。

小珊的原始解題記錄只寫 $50 \times 40 = 2000$, 未完成解題。小珊對第 5 題的題意了解有困難, 認為「賣出去的比率 80%」, 表示會賠 20% (0403T-0404S2), 但題目卻又說「想賺 20%」, 前後不一 (0402S2), 是小珊**了解問題**的困難處。經研究者提示可以「賣貴一點」, 小珊開始嘗試解題。

0401T: 哪裡看不懂?

0402S2: 他要賺 20%, 一開始應該會”賠”20%,

0403T: 一開始會賠 20%? 為什麼?

0404S2: 因為賣出去只有 80%,

0405T: 所以你觉得一开始会赔 20%, 为什么又会变成赚 20%这样吗?

0406S2: 嗯

.....

0337T: 40 是?

0339S4: 40 是賣出去的幾斤,

0340T: 那 60 呢?

0341S4: 60 是每斤的價錢, 所以乘以 60 就是 2400, 就跟他原來想賺的錢一樣。

0409T: 他會賠 20%, 那能不能賣貴一點?

0410S2: 可以, (在 $50 \times 40 = 2000$ 的後面, 寫下 $2000 \times \frac{20}{100} = 400$
 $2000 - 400 = 1600$)

0411S2: (畫掉 $2000 \times \frac{20}{100} = 400$

$2000 - 400 = 1600$ 改為

$2000 \times \frac{120}{100} = 2400$ $2400 \div 40 = 60$)

2. 小珊的解題計劃不完整, 不知如何將「賣出去的比率 80%」此一已知條件, 應用在解題中。

在研究者協助了解問題後, 小珊解題如圖 6, 小珊**擬定計劃**利用「每斤 40 元」、

「买进 50 斤」、「想赚 20%」三个已知条件，先行计算水果商买进水果的总成本（0413S2），接着运用总成本和「想赚 20%」，以母子和的概念得到期待的总收入（0413S2-0416S2），最后以期待的总收入除以「买进 50 斤」，得到每斤应卖出 48 元（0428S2）。

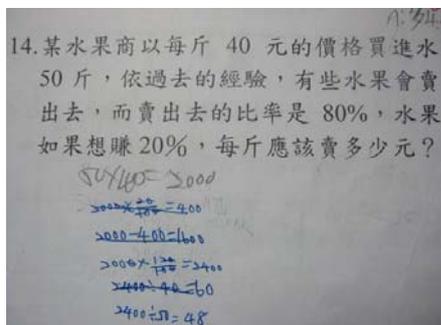


图6 小珊第 5 题访谈中的解题记录

0412T: 你写的第一行是?

0413S2: 总共花的钱，他花 2000 元把水果买进来，2000 乘以 $\frac{120}{100}$ 是他想要赚的

0414T: 他想要赚的?

0415T: 你的 2400 是全部收入的钱还是只有赚的部分?

0416S2: 收入

0417T: 收入，那赚的是多少?

0418S2: 赚的，总共 400

0419S2: 除以 40 就是一斤要赚多少.....

0425S2: 错了，除以 50 吧!

0426S2: (画掉 $2400 \div 40 = 60$ 改为 $2400 \div 50 = 48$)

0427T: 你算出来的 48 是什么?

0428S2: 一斤要卖 48 元才会赚 20%

小珊知道题目中「卖出去的比率 80%」，表示水果商只卖出去 80% 的水果，剩下 20% 没卖出（0434S2），正确的了解问题中此叙述的题意。此外，小珊可以利用「买进 50 斤」、「卖出去的比率 80%」，算出实际上应可卖出去的水果是 40 斤（0438S2），但不知道如何运用此一讯息在解题上，是为其拟定计划困难之处。

0429T: 你的答案是.....?

0430S2: 就 48 元

0431T: 那你觉得题目中哪一个条件没有用到?

0432S2: 80%

0433T: 那个 80% 是什么?

0434S2: 只卖出 80%，他会剩下 20% 没卖出去

0435T: 所以呢?

0436S2: (沉默)，不知道 0

0437T: 他卖出去几斤?

0438S2: $50 \times 80\%$ ，40 斤

.....

小珊將「賣出去的比率 80%」解讀為水果商會賠 20%，却发现賠 20% 與題目所提供的另一已知條件「水果商想賺 20%」互相衝突，造成小珊**了解問題**的困難。而在**拟定計劃**階段，小珊順利整合「每斤 40 元」、「買進 50 斤」、「水果商想賺 20%」三個條件，但在提示下仍無法應用「賣出去的比率 80%」此一訊息於解題中。

綜合以上訪談結果，第 5 題題目冗長且呈現兩個百分率數值，原始解題記錄錯誤的學生，在了解問題階段已有困難，且困難處各不相同：小珊認為兩個百分率數值互相矛盾、小浩則對「想賺 20%」的基準為何存有疑慮。訪談中，小浩在研究者的提示下，順利整合「賣出的比率 80%」與其它已知條件，完成解題，而小珊在提示下仍無法利用「賣出的比率 80%」此條件。原始解題紀錄正確的小于和小瑄，兩人解法不同，但了解問題與拟定計劃皆完整正確。除了小浩，研究者在訪談中未見其餘學生有驗算的表現。

二、六年級學童解「基準量未知」百分率問題的解題歷程

題目：【問題 7】政府規定貨品從國外進口要加 6% 的稅，爸爸在商店買了一件國外進口的商品，花了 350 元，請問未課稅的商品是多少元？

(一)原案五【訪談對象：小于】

1. 小于主動在訪談中詢問「未課稅」的意思，了解題意後立即發現自己解題錯誤。

小于第 7 題的原始解題紀錄如圖 7。在訪談中讀了題目後，小于主動詢問「未課稅」是什麼 (0501S5)，顯見其**了解問題**有困難。在研究者說明後，小于立即發現自己在工作單上的解題記錄錯誤 (0503S5)。其原始的解題想法，如同研究者在訪談前所做的推測，確實是將課稅後的商品價格 350 元當做稅的計算基準 (0505S5) 來解題，此為其**拟定計劃**的錯誤。

0501S5: 未課稅是什麼?

0502T: 就是還沒有加稅之前他賣多少錢,

0503S5:我寫錯了

0504T: 那本來是在寫什麼?

0505S5: 我想說他進口進來 350 塊嘛, 然後裡面的 6% 是多少, 就是稅

0506T: 那為什麼要 350 再減 21?

0507S5: 因為他要問未課稅, 所以把後來的扣掉稅

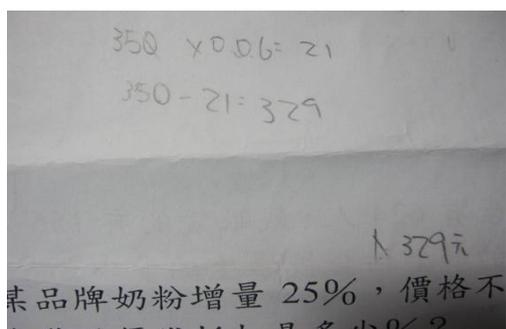


圖7 小于第 7 題的原始解題記錄

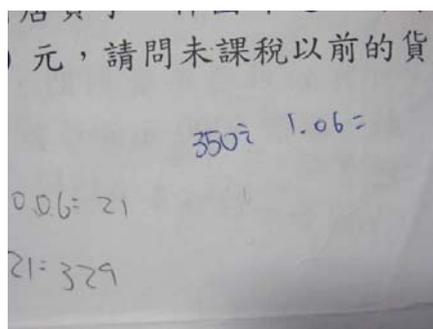


圖8 小于第 7 題訪談中的解題記錄

2. 小于在确认题意后，将课税前的商品价格视为 100%，辅以母子之和的概念，以当量除的方法，在访谈中顺利解题。

小于说明自己写工作单当时的解题想法后，重新尝试解题如图 8，访谈发现小于可将课税前的商品价格视为 100% (0509S5)，再揉合母子之和的概念 (100%+6%)，以当量除的方法，计算课税前的商品价格，访谈当中，确实可见小于拟定计划能力的展现。小于访谈中的解题与工作单上原始的解题记录有所差距，其原因，除了对第 7 题的题意了解更加精准之外，亦可能是小于的百分率概念已随时间而更为成熟。

0508T: 为什么除以 1.06

0512T: 那算出来的会是什么?

0509S5: 因为他加税前等于 100% 嘛，
然后要加 6%，就是 100% 加 6%，
就是 1.06 啊

0513S5: 嗯? 算出来的是啥啊? 就是他原本的吧!.....就是他除以 1.06，
等于他原本的那个未课税以前的货品的钱

0510T: 然后呢?

0511S5: 算出来，

小于解第 7 题，在工作单上和访谈的解题有所不同，访谈时，小于在研究者协助下更精确掌握题意，而在拟定计划阶段，找到课税前的商品价格当做基准 (100%)，进而顺利解题。

(二)原案六【访谈对象：小浩】

- 小浩知道商品原价为基准 100%，将之设为未知数 X，再运用母子之和的概念，以方程式正确表征题意并完成解题。

小浩原始解题纪录如图 9，正确解题。由访谈对话发现，小浩对于第 7 题能够正确了解问题 (0601S4)，可能因其生活经验较为丰富，其谈话中出现其它学生所没有的「关税」二字，此外，正确地找到 6% 的基准，将课税前的商品价格当作 100%，再揉合母子之和的概念 (1+6%)，假设课税前的价格为 X，列出方程式： $X(1+6\%)=350$ ，表征了课税前的商品价格乘上 (1+6%)，等于课税后的价格 350 元，为拟定计划能力的展现 (0602S4)。

0601S4: 他假设他原本定价是 100%，
可是要加 6% 的关税，所以是 106%，

1.06 等于 350，所以 350 除以 1.06
就是他的原价是多少，算出来是
330.9，

0602S4: 然后 106% 等于 1.06，就是假
如他原价是 X，X 乘以 (1+6%)，

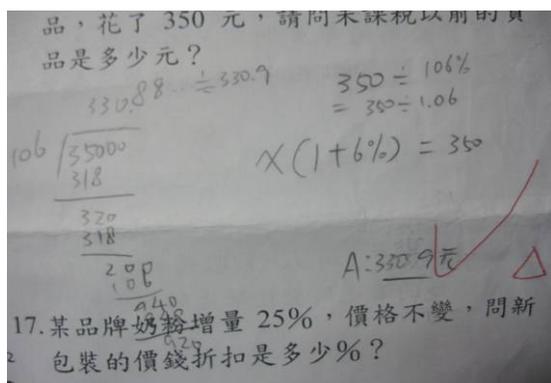


图9 小浩第7题的原始解题记录

小浩在了解问题阶段，正确诠释题目的意义，而在拟定计划阶段，找到课税前的商品价格当做基准（100%），而后顺利解题。另2位学生小瑄和小珊，分别列出方程式 $\square \times \frac{106}{100} = 350$ 及 $\square \times 1.06 = 350$ 。访谈发现，其第7题的解题思维与小浩相同，因此不再呈现他们的访谈对话。

综合以上访谈结果，小浩、小瑄和小珊正确了解问题，确认课税基准是课税前的商品价格，并将此解目标设为未知数，而后写成方程式，以代数法成功解题。原始解题失败的小于，在访谈中也能确认课税基准，并展现母子和概念，直接以当量除的方法完成解题。小于最初解题失败，主要是对课税问题概念模糊，加上错误地以课税后的商品价格做为课税基准所造成。访谈中，未见学生在第7题有验算与回顾的展现。

伍、结论与建议

一、结论

综合以上研究结果，提出结论说明学生的解题历程如下：

(一) 了解问题：学生了解题意的障碍，出自于对题目语意理解的困难，及百分率基准辨识的不易，两者皆造成解题的阻碍。研究者协助厘清题意后，学生能正确解题。

解题的进行，首重了解题意。小浩解第5题水果买卖问题，对20%的基准为何提出疑问；小珊对题意了解不清，认为卖出80%，水果商会「赔20%」，与题目中的另一已知条件，水果商想「赚20%」，前后不一致，因此造成小珊解题的困难。而小于解第7题课税问题，对于「未课税」的意义感到迷惑，亦造成其解题的失败。

访谈过程，研究者帮助厘清题意后，发现小浩可以顺利解决水果买卖问题，小珊最后虽未能成功解题，但其解题执行已向前迈进一大步，而小于在确认题意后，亦正确完成课税问题的解题。

(二) 拟定计划与执行计划：能否正确判断百分率数值的基准为何，是百分率问题解题正确与否的重要关键

第 5 题水果买卖问题中呈现两个百分率数值，解题时须经过多步骤思考与计算，因步骤繁复，因此答题正确的学生之解题思维具有差异性：小于的解题步骤与大多数解题正确的学生相同，先计算赚 20% 后的总收入，再计算卖出的斤数，相除得到答案 60 元；小瑄先计算不赚不赔的情况下，只卖出 80%，每斤要卖 50 元，再乘以 120%（想赚 20%），得到答案 60 元；小浩在厘清 20% 的基准后，先计算完全卖出，且赚 20% 的情况下，每斤卖 48 元，而后再除以 80%（只卖出 80%），得到答案 60 元。由这 3 位学生的解题，可见其都能正确掌握每一百分率数值的基准，且巧妙各自不同。而小珊在此题解题失败，其错误为所有解题失败学生中最常见的错误类型：无法应用题目中的已知条件「卖出去的比率是 80%」于其解题计划之中。

第 7 题课税问题的解题，小瑄、小浩、小珊在确认原价为基准（ $\frac{100}{100}$ 或 100% 或

1) 之后，辅以母子和的概念，三人以代数法，分别列出方程式 $\square \times \frac{106}{100} = 350$ 、 $X(1+6\%)=350$ 及 $\square \times 1.06=350$ 成功解题。因解题步骤单纯，三位解题正确的学生除了数值表示法的差异（ $\frac{106}{100}$ 、106%、1.06），其解题策略几乎完全一致。而透过对小于的访谈，确认此题最常见的错误类型（ $350 \times 6\% = 21$ ， $350 - 21 = 329$ ），是因学生解题时将课税后的金额 350 元视为基准量，又因「税是加上去的，计算未税价就要减掉税」的观念，计算得到错误答案 329 元。

(三) 验算与回顾：学生解百分率问题，很少有验算与回顾的表现。

Polya 的理论中，「验算与回顾」阶段，包含 1.对答案的验算、2.对过程的验算、3.用别的方法推导出相同的结果、4.能否一眼看出答案、5.能否在别的问题上，应用这个结果与方法。综合水果买卖与商品课税这两题的访谈结果，个案学生解百分率问题，很少有验算与回顾的表现，只有小浩对第 5 题水果买卖问题的答案进行了验算。

工作单上的百分率问题具有难度，了解问题与拟定计划已相当困难，在思考解题策略已经遭遇瓶颈的学生，并不容易有验算与回顾此一涉及后设认知能力的表现。此外，国内的数学教学长久以来着重于标准算则的训练，很少去引导学生判断其计算结果的合理性（Yang & Li, 2008），即使教科书中有部份关于验算的教学内容，却也仅止于对数字运算结果的检验，而缺乏在应用题或生活情境中，讨论答案的合理与否。因此学生在解百分率问题时，运用题目中的数字解题完成后，少有验算与回顾表现的情况，也就不难想见。

二、建议

(一) 加强学生阅读理解，帮助学生「了解问题」能力的提升

学生解百分率问题在读题阶段，遭遇「了解问题」的困难，例如小于在第 7 题不能理解「未课税」的意义，就难以有后续正确的解题表现。因此，建议教师结合数学与国语等其它领域的教学，鼓励学生广泛阅读并培养阅读理解能力，如此有助学生正确了解应用题之题意，提高正确解题的可能性。

(二) 在百分率的教学上，多与引导学生讨论百分率数值的基准量为何

百分率问题的解题最常见的错误，在于百分率数值基准量的误判，例如本研究中的课税问题，不少学生将课税后的价格视为基准量，造成解题失败。教师在百分率单元的教学，除了百分率与分数、小数等数值间的转换 ($78\% = \frac{78}{100} = 0.78$)，以及百分率基本题型（比较量 \div 基准量=百分率、基准量 \times 百分率=比较量）的练习之外，应多引导学生讨论百分率的意义，以及百分率数值的基准量为何。学生能正确分辨百分率与数量间的关系，数值转换与百分率计算才有意义，也才能解决实际问题。

(三) 鼓励学生不同的解题策略，并尝试验证答案的合理性

国内学生的解题，缺乏对答案合理性的检验，在本研究中也得到相同结果，学生往往在计算得到答案后，即认为解题已经完成。然而 Polya 的解题理论提到，再次验算答案，与思考解答的过程，会让学生有机会加深对数学知识的理解，以及培养解题能力。数学教学应将思考能力的培养，优先于计算技巧的训练，教师宜鼓励学生尝试从不同角度切入解题，引导学生分享、讨论相同题目的不同解题策略，让学生有机会互相学习，比较不同解题策略的思维过程。当学生愿意尝试多面的思考向度，对同一题目有多元解法，验算与回顾才有实现的可能。

参考文献

- 黄毅英、黄家鸣 (1997)。十个地区数学教育课程标准。《数学传播》，21，28-41。
- Ali, R., Hukamdad, Akhter, A., & Khan, A. (2010). Effect of using problem solving method in teaching mathematics on the achievement of mathematics students. *Asian Social Science*, 6(2), 67-72.
- Barba, R.H. (1990). Problem solving pointer. *Science Teacher*, 57(7), 32-35.
- Gay, S., & Thomas, M.(1993). Just because they got it right, does it mean they know it? In N. L. Webb (Ed.), *Assessment in the mathematics classroom* (pp.130-134). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lembke, L. O., & Reys, B. J. (1994). The development of, and interaction between, intuitive and school-taught ideas about percent. *Journal for Research in Mathematics*

Education, 25(3), 237-259.

Lester, F. K. (1980). Problem solving: Is it a problem? In M. M. Lindquist (Ed.), *Selected issues in mathematics education* (pp.36). Berkeley, CA: McCutchan.

Mayer, R. E. (1991). *Thinking, problem solving, cognition* (2nd ed.), New York: W. H. Freeman and Company.

National Council of Supervisors of Mathematics. (1989). Essential mathematics for the twenty-first century: The position of the National Council of Supervisors of Mathematics. *Arithmetic Teacher*, 37(1), 44-46.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles & standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Polya, G. (2006). *怎样解题* (蔡坤宪译)。台北：天下文化。(原著出版于 1945)。

Schoenfeld, A. D. (1985). *Mathematical problem solving*. San Diego, CA: Academic press.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2004). Developing assessment problems on percentage. In T. A. Romberg (Ed.), *Standard-based mathematics assessment in middle school* (pp. 83-99). New York, NY: Teachers College Press.

Yang, D.C. & Li M. N. (2008). An investigation of 3rd-grade Taiwanese students' performance in number sense. *Educational studies*, 34(5), 443-455.